E.N.S.I. PHYSIQUE-MECANIQUE Option P 1981

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4h)

I

1° On se propose de démontrer l'égalité : $(\mathcal{E}) : \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Pour tout nombre réel R, positif ou nul, on pose :

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2}\,dt, \qquad J_R = \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy, \qquad K_R = \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

où C_R et Q_R désignent respectivement le « carré » défini par $0 \leqslant x \leqslant R$, $0 \leqslant y \leqslant R$, et le « quart de disque » défini par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

a. Montrer que $J_R = I_R^2$ et que $K_R \leqslant J_R \leqslant K_R\sqrt{2}$.

b. Calculer explicitement K_R et déduire de ce qui précède la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et l'égalité $(\mathcal{E})$.

2° On désigne par s un nombre réel strictement positif. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^{s-1}\,du$ est convergente.

3° Notant $\Gamma(s)$ la valeur de l'intégrale précédente, calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma(1)$; établir une relation de récurrence entre $\Gamma(s+1)$ et $\Gamma(s)$ puis calculer, pour tout entier n strictement positif, $\Gamma(n)$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

4° Étudier : $\lim\limits_{\substack{s \to 0 \\ s > 0}} \Gamma(s)$; $\lim\limits_{s \to +\infty} \Gamma(s)$.

II

1° Soient α un nombre réel quelconque, y une fonction dérivable de la variable réelle x, y' sa dérivée première. On considère l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) : 2xy' - (\alpha - 2 - x)\,y = 0$$

a. Déterminer, pour x appartenant à l'un ou l'autre des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, l'intégrale générale de (E_α).

b. Se limitant au cas où α est entier ($\alpha \in \mathbb{Z}$), déterminer les valeurs de α pour lesquelles (E_α) possède des solutions (autres que la solution f définie par $f(x) = 0$ pour tout x) définies sur $\mathbb{R}$. Préciser ces solutions.

2° Soit (f_n), $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, la suite de fonctions définies comme suit :

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}$$

où l'on suppose $x > 0$ si $n = 1$, $x \geqslant 0$ si $n \geqslant 2$.

a. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer que, si n est au moins égal à 3, l'équation $f_n'(x) = 0$ possède une solution strictement positive, et une seule, notée r_n, que l'on calculera.

c. Étudier, suivant les valeurs de x, les variations des fonctions f_n, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ et tracer sommairement les courbes représentatives correspondantes. (On ne demande pas le tracé de ces courbes sur un même graphique, ni l'étude de leur concavité.)

.../...

3° On se propose maintenant d'étudier la position relative des courbes représentatives C_n et C_{n+1} des fonctions f_n et f_{n+1} ; on se limitera au cas $n \geqslant 4$.

a. Démontrer que l'équation : $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ possède une solution strictement positive, et une seule, notée α_n, que l'on calculera en fonction de $\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$.

b. Calculer :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}.$$

c. Admettant provisoirement le résultat demandé en IV.2°, à savoir :

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} > 1,$$

comparer α_n et r_{n+1}.

Tracer alors C_n et C_{n+1} sur un même graphique.

III

1° Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer I_1 et I_2 ; établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n, puis calculer I_n en fonction de n.

b. Montrer que I_n est une fonction strictement décroissante de n et que pour tout n supérieur ou égal à 2 :

$$\left[\frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 2n$$

c. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n = \left[\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}\right]^2 2n.$$

Montrer que :

$$0 < u_n - \frac{\pi}{2} < \frac{u_n}{2n+1}.$$

d. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{et que} \quad \pi = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2}$$

Cette dernière relation est appelée « formule de Wallis ».

2° Soit la suite (S_n), $n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$S_n = \operatorname{Log}(n!) - n \operatorname{Log} \frac{n}{e} - \frac{1}{2} \operatorname{Log} n$$

(Log x désigne le logarithme népérien de x et e la base des logarithmes népériens.) Montrer que :

$$S_n - S_{n-1} = \frac{\lambda}{n^2} + \frac{\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2} \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

.../...

λ étant une constante réelle que l'on déterminera. En conclure que la série (V_n), $n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$V_1 = S_1 \quad \text{et} \quad V_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{si} \quad n \geqslant 2$$

est une série convergente.

3° On pose $S = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n$.

Exprimer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$

en fonction de S, puis calculer e^S à l'aide de la formule de Wallis.

IV

On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude de la suite (M_n), $n \geqslant 3$, définie par $M_n = f_n(r_n)$ [voir II, 2°, *b*].

1° *a.* Tracer, dans un repère cartésien, la courbe représentative de la fonction φ définie par $\varphi(t) = \text{Log}(1+t) - t$.

b. Déduire de ce qui précède que, si β et u sont deux nombres réels strictement positifs, on a :

$$(1 + \beta u)^{\frac{1}{\beta}} < e^u.$$

c. Déterminer la borne supérieure de la suite (A_n), $n \geqslant 3$, définie par :

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

2° On considère la suite (B_n), $n \geqslant 3$, définie par :

$$B_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \, \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Expliciter B_{2p} et B_{2p+1} en fonction de u_p et montrer que $B_n > 1$. (On pourra utiliser les résultats obtenus en III, 1°, *c.*)

3° Calculer $\dfrac{M_{n+1}}{M_n}$ en fonction de A_n et de B_n et en conclure que la suite (M_n) est convergente.

4° Déterminer un équivalent de M_n au voisinage de $+\infty$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} M_n$.

5° Montrer que l'on a, n étant un entier strictement positif :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2M_{2n+1}} \left(\frac{n - \frac{1}{2}}{e}\right)^{n - \frac{1}{2}}$$

et déterminer, si $x \in \mathbb{N}$ ou si $x - \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}$, un équivalent de $\Gamma(x+1)$ au voisinage de l'infini.

XXXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail